2011

第1問

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f(1)=1 \quad f(-1)=-1 \quad \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$

$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(f''(x))^2dx.$

$f(1)-1=0,\ f(-1)-(-1)=0$ より ＊1

$f(x)-x=g(x)$ とすると、

$g(1)=g(-1)=0$. よって因数定理より

$e=\frac{d}{a}\ (a\neq 0)$ とすると

$$
\begin{aligned}
g(x)&=ax^3+bx^2+(c-1)x+d\\
&=a(x+1)(x-1)(x-e)\\
&=a(x^2-1)(x-e)\\
&=ax^3-aex^2-ax+ae
\end{aligned}
$$

よって $b=-ae,\ c-1=-a,\ d=ae.$ …①

また $\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx$

$$
\begin{aligned}
&=2\int_0^1(bx^2+d)dx\\
&=2\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^1=\frac{2}{3}b+2d=1 \quad \cdots②
\end{aligned}
$$

①より $b=-d$ であるから.

$-\frac{2}{3}d+2d=1 \iff d=\frac{3}{4}$ よって $b=-\frac{3}{4}$

よって

$g(x)=ax^3-\frac{3}{4}x^2-ax+\frac{3}{4}$ すなわち

$f(x)=g(x)+x=ax^3-\frac{3}{4}x^2+(1-a)x+\frac{3}{4}$

ここで、

$f'(x)=3ax^2-\frac{3}{2}x+1-a$

$f''(x)=6ax-\frac{3}{2}$

$$
\begin{aligned}
I&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(6ax-\frac{3}{2}\right)^2dx\\
&=9\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(4a^2x^2-2ax+\frac{1}{4}\right)dx\\
&=9\left[\frac{4}{3}a^2x^3-ax^2-\frac{1}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}\\
&=9\left\{\left(\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{4}a-\frac{1}{8}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\left(-\frac{4}{3}a^2-a+\frac{1}{4}\right)\right\}\\
&=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8} \quad ＊2\\
&=\frac{27}{2}\left(a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)\\
&=\frac{27}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right\}
\end{aligned}
$$

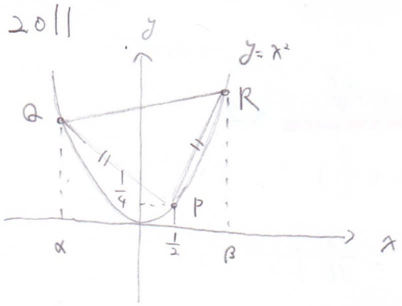
よって $a=-\frac{1}{4}$ すなわち

$f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$ のとき

I は最小 $\frac{81}{32}$ をとる.

2011

第4問



まず△PQRの重心の座標は

$X=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta\right)$

$Y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\alpha^2+\beta^2\right)$ より

$G\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\alpha+\beta\right),\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\alpha^2+\beta^2\right)\right)$ …①

とα,βを用いて表される。

$PQ=PR$ より $PQ^2=QR^2$ であるから

$\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^2=\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2$

$\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}+\alpha^4-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{16}$

$\quad=\beta^2-\beta+\frac{1}{4}+\beta^4-\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{16}$

$\alpha^4+\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha=\beta^4+\frac{1}{2}\beta^2-\beta$

$(\beta^4-\alpha^4)+\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)-(\beta-\alpha)=0$

$(\beta-\alpha)\left\{(\beta^2+\alpha^2)(\beta+\alpha)+\frac{1}{2}(\beta+\alpha)-1\right\}=0$

$\beta\neq\alpha$ より ＊1

$(\beta^2+\alpha^2)(\beta+\alpha)+\frac{1}{2}(\beta+\alpha)-1=0$ …②

①より

$\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2}$, $\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}$ であるので

②より

$\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\left(3X-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(3X-\frac{1}{2}\right)-1=0$

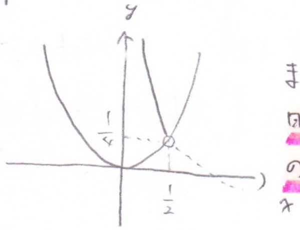
$9XY-\frac{3}{4}X-\frac{3}{2}Y+\frac{1}{8}+\frac{3}{2}X-\frac{1}{4}-1=0$

$9XY+\frac{3}{4}X-\frac{3}{2}Y-\frac{9}{8}=0$

$XY+\frac{1}{12}X-\frac{1}{6}Y-\frac{1}{8}=0$

$\left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$ …③ ＊2

これは、$XY=\frac{1}{9}$ をX軸方向に$\frac{1}{6}$、Y軸方向に$-\frac{1}{12}$動かしたものである。



また、Gの存在範囲は明らかに $y>x^2$ の領域にある。＊3

（更に、$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$ より

③は確かにPを通る。）

以上より、求めるGの存在範囲は、

曲線 $\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$ の $x<\frac{1}{2}$ の部分。